Journal of Radiation Industry 4 (1) : 85~89 (2010)

Technical Paper

가변 유입유량 공정시스템에 대한 상태방정식을 이용한 체재시간분포 해석

문 진 호*·정 성 희·김 종 범

한국원자력연구원 동위원소이용기술개발부

Analysis of the Residence Time Distribution for a Variable Feed Rate System by the State-space Equation

Jinho Moon*, Sung-Hee Jung and Jong-Bum Kim

Radioisotope Research Division, Korea Atomic Energy Research Institute, Daejeon 305-353, Korea

Abstract - The radioactive experiments are carried out for diagnosis of a variety of industrial processes in terms of the operation condition and the efficiency by measuring the residence time distribution. However, it is not easy to interpret the residence time distribution using the conventional methods when the flow rate is not constant and a number of processes are coupled in a complicated manner. In these cases, they can be analyzed by describing the system with mathematical models that can be defined with the state-space equations. In this paper, the residence time distribution of sludge was measured with a radiotracer, ^{46}Sc-EDTA, in the digester of which the flow rate varies with time. The digester was assumed as a linear time variant system since the flow rate changed during the experiment and the operation efficiency of the digester was calculated by applying the state-spae equations.

Key words : Residence time distribution, State-space equation, Radiotracer

서 론

방사성추적자를 이용한 공정 진단 기술은 중요한 방사성동위원소 이용기술 중의 하나로 체재시간 분포를 측정하여 석유화학 시설 등의 반응기의 운전효율, 운전상태 등의 측정에 널리 사용되고 있다(Chalton 1986). 체재시간 분포 측정과 더불어 중요한 것은 수리적 모델에 의한 시스템의 해석 기술로서 이상적 운전조건과 실제 실측의 결과의 대비를 통하여 운전 상태를 파악할 수 있다. 많은 경우 해석을 용이하게 하기 위해 선형 시불변 시스템(linear time invariant system)을 가정하여 실험결과를 해석하고 있지만(Pant *et al.* 1999) 대부분의 실제 공정은 시변 시스템(time variant system)이다. 유량이 시간에 따라 변하는 경우 연립 미분방정식의 계수가 시간의 변수가 되어 일반적으로 해를 구하는 것은 매우 어렵다. 상수계수가 아닌 연립 미분방정식의 해를 구하는 경우 상태방정식(state-space equation)을 이용한 해석 방법이 장점을 가지며 이에 대한 해석방법에 대한 소개가 있다(IAEA 1990). 상태방정식을 활용한 해석방법의 많

* Corresponding authors: Jinho Moon, Tel. +82-42-868-8048, Fax. +82-42-862-6980, E-mail. jinhomoon@kaeri.re.kr

은 장점에도 불구하고 상태방정식의 접근을 통한 방사성추적자 실험해석을 시도한 연구는 많지 않았다. 따라서 본 논문에서는 방사성 추적자 해석에 상태방정식 기법을 소개하고, 유량이 시간에 따라 변하는 1단 소화조의 체재시간분포 측정 데이터를 대상으로 상태방정식을 이용하여 해석하였다.

수학적 이론

상태방정식에 의한 해 구하기는 다변수의 연립 미분방정식을 풀기 위해 고안된 방법으로 전기공학, 기계공학, 화학공학 등의 분야에서 널리 사용되는 방법이다 (Seborg *et al.* 2003). 우선 상태방정식에 의한 혼합기 해석을 설명하기 위하여 유량 Q가 일정한 Fig. 1과 같은 모델을 생각해보자. 이에 질량 균형 조건 (mass balance condition)을 만족하는 연립 미분방정식은 식 1과 같이 된다.

$$V_1\frac{dC_1(t)}{dt}=-Q(1+k)C_1(t)+kQC_2(t)+QC_{in}(t)$$

$$V_2\frac{dC_2(t)}{dt}=kQC_1(t)-kQC_2(t) \tag{1}$$

상태방정식으로 표시하기 위해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{dC_1(t)}{dt}=-\frac{Q}{V_1}(1+k)C_1(t)+k\frac{Q}{V_1}C_2(t)+\frac{Q}{V_1}C_{in}(t)$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt}=k\frac{Q}{V_2}C_1(t)-k\frac{Q}{V_2}C_2(t) \tag{2}$$

여기서 상태 변수 (A, B, C, D)와 상태벡터 (x(t), u(t))를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{Q}{V_1}(1+k) & k\frac{Q}{V_1}\\ k\frac{Q}{V_2} & -k\frac{Q}{V_2}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{Q}{V_1}\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}C_{in}(t)\\0\end{bmatrix}$$

정의된 상태 변수를 사용하여 식 3과 같이 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{3}$$

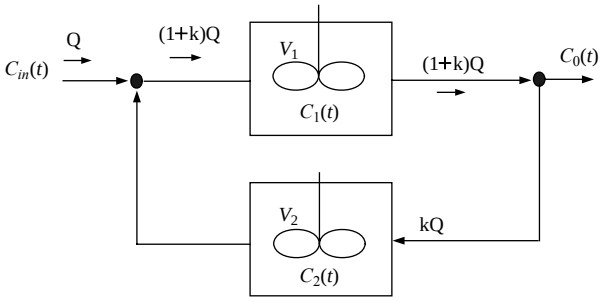

Fig. 1. Partial recirculation flow model.

식 3에 의해 표시된 상태방정식에서 $C_1(t)$에 대해 관찰할 경우 해는 식 4와 같이 표시된다.

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{4}$$

이산 시간 (discrete time) 영역에서는 다음과 같이 표시된다 (Chen 1999).

$$\mathbf{y}[k]=\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0]+\sum_{m=0}^{k-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-m}\mathbf{B}\mathbf{u}[m]+\mathbf{D}\mathbf{u}[k] \tag{5}$$

만약 유량 Q가 시간에 따라 변하는 시간의 함수 $Q(t)$인 경우에는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{Q(t)}{V_1} & k\frac{Q(t)}{V_1}\\ k\frac{Q(t)}{V_2} & -k\frac{Q(t)}{V_2}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}(t)=\begin{bmatrix}\frac{Q(t)}{V_1}\\0\end{bmatrix}$$

마찬가지로 시간에 따라 변하는 상태방정식은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{6}$$

시간에 따라 변하는 시스템의 상태방정식의 해는 다음과 같이 된다 (Chen 1999).

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(0)+\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^t\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

여기서 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$, $\mathbf{X}(t)$는 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$의 기본행렬 (fundamental matrix)이며, $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$는 상태천이행렬(state-transition matrix)이라 불리며, 이산 시간 영역에서는 식 8과 같이 표시된다.

$$\mathbf{y}[k]=\mathbf{C}[k]\mathbf{\Phi}[k,k_0]\mathbf{x}_0+\mathbf{C}[k]\sum_{m=k_0}^{k-1}\mathbf{\Phi}[t,m+1]\mathbf{B}[m]\mathbf{u}[m]$$
$$+\mathbf{D}[k]\mathbf{u}[k] \tag{8}$$

실험 방법

소화조 진단을 위해 추적자로 사용된 방사성동위원소 ^{46}Sc은 한국원자력연구원의 연구용 원자로 HANARO에서 중성자 조사하여 ^{45}Sc(n, γ)^{46}Sc 반응으로 생산하였으며, 소화조 내 슬러지의 유체거동과 동일한 거동형태를 모사하기 위하여 EDTA와 착화합물(complex compound) 용액형태로 제조하여 실험에 사용하였다. 실험대상 소화조는 슬러지 농축조로부터 유입되는 슬러지를 소화(digestion)시킨 후 다음 공정인 탈수조로 이송시키는 방식으로 운전되고 있다. 대상 소화조는 단단 실린더형으로 용량 9,236 m^{3}의 규모이다. 방사선 계측을 위해 2×2 inch NaI 섬광검출기를 사용하여 유입 및 유출배관에 설치하였다. 방사선 검출기는 납으로 제작된 고밀도 조준경(collimator) 내부에 장착하여 주변 자연방사선에 의한 영향을 최소화시켜 미량의 방사성추적자 농도변화를 정확히 계측할 수 있도록 하였다. 이로부터 체재시간분포(Residence Time Distribution)를 산정하여 내부 유동에 대한 정보를 제공한다. 추적자의 투입을 위해서 공기압을 사용하는 원격투입장치를 이용하였으며, 투입 위치는 소화조의 유입부에 순간 투입 방식으로 주입하였다. 추적자가 소화조 내부로 투입된 직후의 초기거동은 소화조의 혼합특성을 파악하기 위한 중요한 정보로 이용된다. 방사선 계측을 위해 추적자 주입 초기에는 매초 간격으로, 이후에는 매분을 거쳐 10분 간격으로 방사선 계측결과를 컴퓨터에 저장하였으며 실험은 총 30일간 수행하였다.

소화조 진단 실험 결과의 해석

본 논문에서는 ^{46}Sc-EDTA 착물을 이용한 소화조 진단 실험 데이터에 대해 상태방정식을 적용한 해석을 시도하였다. 측정 대상인 소화조는 설계 부피 9,263 m^{3}의 1단의 혼합기형태이며, 실험기간 동안 유량을 Fig. 2에 나타내었다. 이 경우 실험기간 동안 유량이 변하므로 소화조를 선형 시변 시스템으로 가정하여 해석하였다. 방사성추적자의 임펄스 투입인 경우 초기값만 존재하고, u(t)의 함수가 0이 되므로 이에 의한 질량 균형 공식 식 1은 다음과 같이 간단히 표시될 수 있다.

$$\frac{dC_1(t)}{dt}=-\frac{Q(t)}{V}C_1(t)$$

위 식을 상태방정식의 형태로 표현하면 다음과 같이

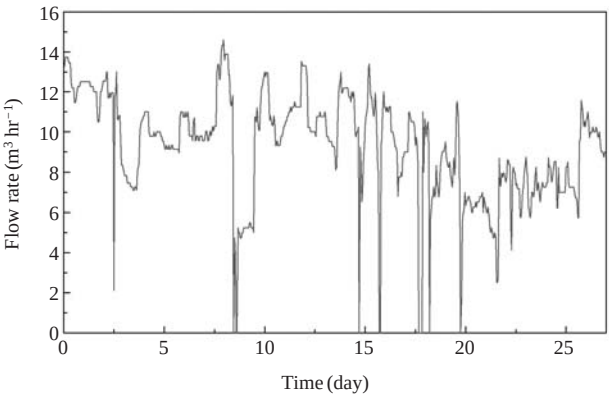

Fig. 2. The flow rate of feed sludge into the digester during the experiment.

된다.

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

여기서 $-\frac{Q(t)}{V}=A(t)$, 임펄스 투입이므로 $u(t)=0$이므로 상태방정식의 일반해인 식 7은 다음 수식과 같이 간단히 정리된다.

$$y(t)=C(t)\Phi(t,t_0)x(0)$$

여기서 $Q(t)$의 시간에 따른 변동은 주변 지역의 하수발생량과 관계된 것으로서 본질적으로 수식화하기 어려운 임의의 추세라 볼 수 있다. 이와 같은 경우 다음과 같은 이산 시간 영역에서의 표현식이 유리하다.

$$y[k]=C[k]\Phi[k,k_0]x_0,\ \Phi[k,k_0]=A_d[k-1]A_d[k-2]...A_d[k_0],$$
$$A_d=e^{-A[k]\cdot T}$$

여기서 T는 데이터 기록 주기이다.

혼합기 내의 농도를 관측하기 위하여 $y[k]=C_1(t)$로 만들어 주는 조건 $C[k]=1$을 선택하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$y[k]=A_d[k-1]A_d[k-2]...A_d[k_0]x_0 \quad (9)$$

유동이 일정한 경우는 $A_d=e^{-A\cdot kT}$가 되고, $y[k]=x_0e^{-A\cdot kT}$ $=x_0e^{-\frac{Q}{V}t}$로 시불변 상태의 출력과 동일하게 된다. 소화조를 완전혼합기(perfect mixer)로 가정하고, 유량이 Fig. 2와 같이 변할 때 이에 대한 상태방정식 해석에 의한 출력값을 Fig. 3에 도시하였다. 계산에 사용된 부피값을 실제 설계값을 이용하였을 때 편차가 매우 큰 것을 알 수 있는데, 이는 실제 유동에 참여하는 부피는 설계용량과는 차이가 있음을 의미한다. 방사성추적자를 이용한 실측 데이터에 가장 잘 일치하도록 수식의 체적을 변화시

키면서 최소의 편차를 나타내는 조건을 도출하였다. 이 때의 부피가 유효체적이며, 설계 부피에 대한 비율을 운전효율로 볼 수 있다(정 등 2001). 최소 자승법에 의한 계산 결과 본 소화조는 86%의 운전효율을 갖는 것으로 계산되었다.

기존의 직렬완전혼합기 모델(perfect mixer in series model)을 이용하여 산정한 평균체재시간(mean residence time)은 31.6일로 측정되었다(Fig. 4). 실험기간 중 일일 평균 유입유량은 247.3 m^3 day^{-1}이며, 대상 소화조의 가동중 설계체적(9,236.3 m^3)으로부터 산정된 이론적 평균체제시간은 다음과 같다

이론적 $MRT = Volume \div flow\ rate$

$= 9{,}236.3\ m^3 \div 247.3\ m^3\ day^{-1} = 37.3\ day$

이로부터 소화조의 운전효율(Operation efficiency)을

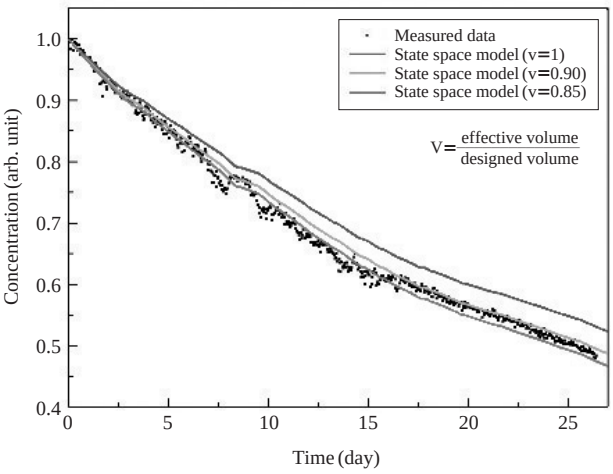

Fig. 3. Comparison of the tracer experimental data and the calculated results from the state-space model.

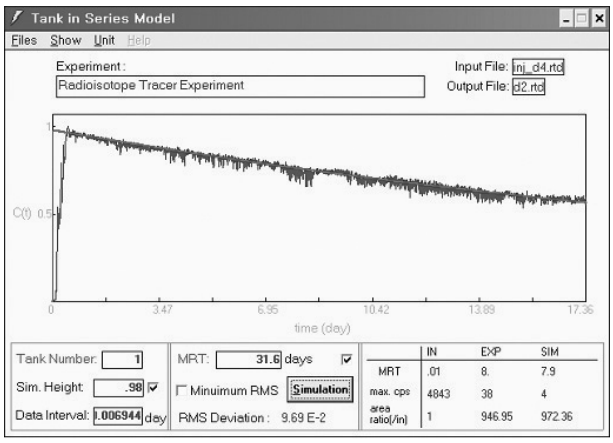

Fig. 4. RTD analysis with the simple CSTR(continuously stirred tank reactor) model.

아래 식을 이용하여 구해낼 수 있다.

$$Operation\ Efficiency = \left(\frac{t}{\tau}\right) \times 100 = \left(\frac{V_{eff}}{V_g}\right) \times 100 = 84.7\%$$

V_g: 기하학적 부피

V_{eff}: 유효 부피(effective volume)

τ: 이론적 평균체재시간(theoretical MRT=부피/유속)

t: 실험에 의해 얻어진 평균체제시간(MRT)

계산된 운전효율은 84.7%로 상태방정식으로 계산된 값과 매우 일치함을 보인다(정 등 2009).

결 론

본 연구에서는 상태방정식을 통하여 유입유량이 일정하지 않은 완전혼합기 형태의 1단 소화조에 대한 운전효율 계산을 시도하였다. 본 실험의 예와 같이 단순한 유동패턴을 갖는 1단 혼합기의 경우 상태방정식의 장점이 크게 부각되지 않는 면이 있다. 그러나 다단 혼합기 공정에서 순환유동이 있는 경우, 또는 유량이 시간에 따라 변하는 경우 등에서는 기존의 해석 적용이 불가능하다. 이에 비해 이산 시간 영역에서의 상태방정식을 이용한 해석은 유량 데이터가 기록되는 한 모든 형태의 이상 운전조건에 대한 해석도 가능하다는 장점이 있다. 특히 순환구조를 갖는 다수의 반응기 모델이 복잡하게 구성된 반응기에서 유량이 시간적으로 변하는 모델인 경우에는 상태방정식으로의 접근이 유일한 해법이다.

본 논문에서는 방사성추적자 해석에 상태방정식 기법을 활용한 데이터 분석을 시도하였으며, 방사성추적자는 소화조와 같은 생화학 반응기뿐만 아니라 일반산업실비 반응기들의 효율진단 해석에도 널리 활용되고 있는 바 상태방정식 접근과 같은 모델해석 기법을 적용함으로써 실제 공정조건을 고려한 정확한 진단결과를 기대할 수 있다.

사 사

이 논문은 교육과학기술부의 재원으로 시행하는 한국과학재단의 방사선기술개발사업으로 수행되었습니다(연구과제 관리코드: 2010-0005240).

참 고 문 헌

정성희, 김종범, 문진호, 권택용. 2009. “Sc-EDTA 착물 추적

자를 이용한 혐기성소화조 유효체적 진단"의 용역보고서. 한국원자력연구원.

정성희, 김종범, 진준하. 2001. 혐기성 슬럿지 소화조의 청소 후 방사성 추적자를 이용한 수리학적 성능 진단, 대한환경공학회 **23**:1641-1648.

Chalton S. 1986. Radioisotope Techniques for Problem-Solving in Industrial Process Plants, Leonard Hill.

Chen C. 1999. Linear System Theory and Design, OXFORD.

IAEA. 1990. Guidebook on Radioisotope Tracers in Industry, Vienna.

Pant H, Thyn J, Zitny R and Bhatt B. 1999. Radioisotope tracer study in a sludge hygienization research irradiator (SHRI). *Applied Radiation and Isotopes* **54**:1-10.

Seborg D, Edger T and Mellichamp D. 2003. Process Dynamics and Control, John Wiley & Sons.

Manuscript Received: February 26, 2010
Revision Accepted: March 8, 2010